PROCESAREA SEMNALELOR - CURS 04

CONTINUARE TRANFORMATA FOURIER, ALIERE

Cristian Rusu

CUPRINS

- **recapitulare**
- **procesul de eșantionare**
- **aliere**
- **referințe bibliografice**

RECAPITULARE

- DFT pentru un vector $\mathbf{x}$:

$$\mathbf{X} = \mathbf{F}\mathbf{x}$$

  - $\mathbf{F}$ se numește matricea Fourier
  - $\mathbf{X}$ se numește transformata Fourier a lui $\mathbf{x}$
  - în anumite situații vedeți $\mathbf{X} = \mathscr{F}(\mathbf{x})$
  - complexitatea $O(n^2)$

- FFT

$$\mathbf{X} = \text{FFT}(\mathbf{x})$$

  - se numește transformarea Fourier rapidă
  - FFT e echivalent cu DFT, dar FFT e mai rapid
  - complexitatea $O(n \log_2 n)$

RECAPITULARE

- matricea Fourier $\mathbf{F}$
  - este liniară, este pătrată, este complexă, este unitară
    - inversa este $\mathbf{F}^{-1} = \mathbf{F}^H$ (transpus și complex conjugat)
  - $\mathbf{Fx}$ este FFT($\mathbf{x}$), $\mathbf{F}^{-1}\mathbf{x} = \mathbf{F}^H\mathbf{x}$ este IFFT($\mathbf{x}$)
  - ambele operații sunt $O(n \log_2 n)$
    - $\mathbf{Fx}$ ar fi trebuit să fie ???
    - $\mathbf{F}^{-1}\mathbf{x}$ ar fi trebuit să fie ???

RECAPITULARE

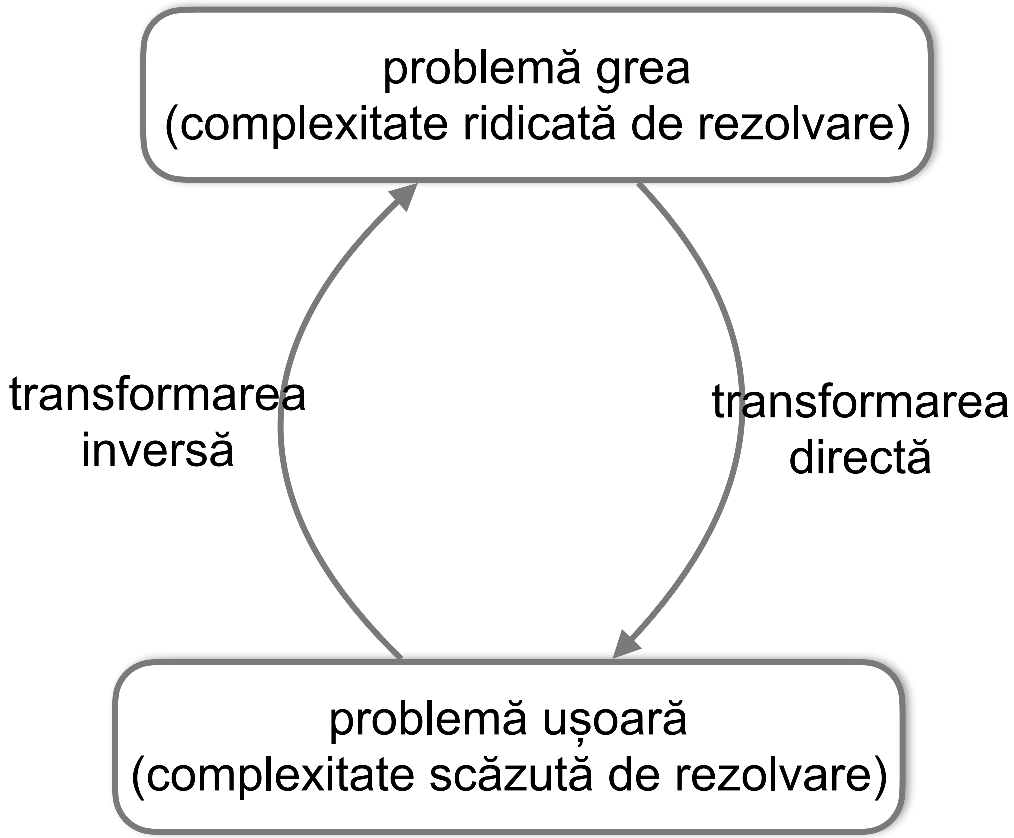
- matricea Fourier $\mathbf{F}$
  - este liniară, este pătrată, este complexă, este unitară
    - inversa este $\mathbf{F}^{-1} = \mathbf{F}^H$ (transpus și complex conjugat)
  - $\mathbf{F}\mathbf{x}$ este FFT($\mathbf{x}$), $\mathbf{F}^{-1}\mathbf{x} = \mathbf{F}^H\mathbf{x}$ este IFFT($\mathbf{x}$)
  - pentru a garanta $\mathbf{F}^H\mathbf{F} = \mathbf{I}$ avem:
    - folosim $\frac{1}{\sqrt{n}}\mathbf{F}$ și $\frac{1}{\sqrt{n}}\mathbf{F}^H$
    - sau folosim $\mathbf{F}$ și $\frac{1}{n}\mathbf{F}^H$
    - pentru a verifica unitaritatea: $\|\text{abs}(\mathbf{F}^H\mathbf{F}) - \mathbf{I}\| \leq \epsilon$
  - $\mathbf{F}$ conservă energia: $\|\mathbf{F}\mathbf{x}\|_2 = \|\mathbf{x}\|_2$
  - ambele operații sunt $O(n \log_2 n)$
    - $\mathbf{F}\mathbf{x}$ ar fi trebuit să fie $O(n^2)$
    - $\mathbf{F}^{-1}\mathbf{x}$ ar fi trebuit să fie $O(n^3)$

RECAPITULARE

- matricea Fourier $\mathbf{F}$
  - este liniară, este pătrată, este complexă, este unitară
    - inversa este $\mathbf{F}^{-1} = \mathbf{F}^H$ (transpus și complex conjugat)
  - $\mathbf{F}\mathbf{x}$ este FFT($\mathbf{x}$), $\mathbf{F}^{-1}\mathbf{x} = \mathbf{F}^H\mathbf{x}$ este IFFT($\mathbf{x}$)
  - ambele operații sunt $O(n \log_2 n)$
    - $\mathbf{F}\mathbf{x}$ ar fi trebuit să fie $O(n^2)$
    - $\mathbf{F}^{-1}\mathbf{x}$ ar fi trebuit să fie $O(n^3)$
- pentru noi, $\mathbf{x}$ este un vector real
  - $\mathscr{F}(\mathbf{x})$ este în general complex (asta nu ne convine mereu)
  - atunci $\mathscr{F}(\mathbf{x})$ are o simetrie
  - prima componentă Fourier este media
  - unele limbaje de programare au RFFT (FFT pentru $\mathbf{x}$ real)
  - cel mai mult ne interesează abs$(\mathscr{F}(\mathbf{x}))$

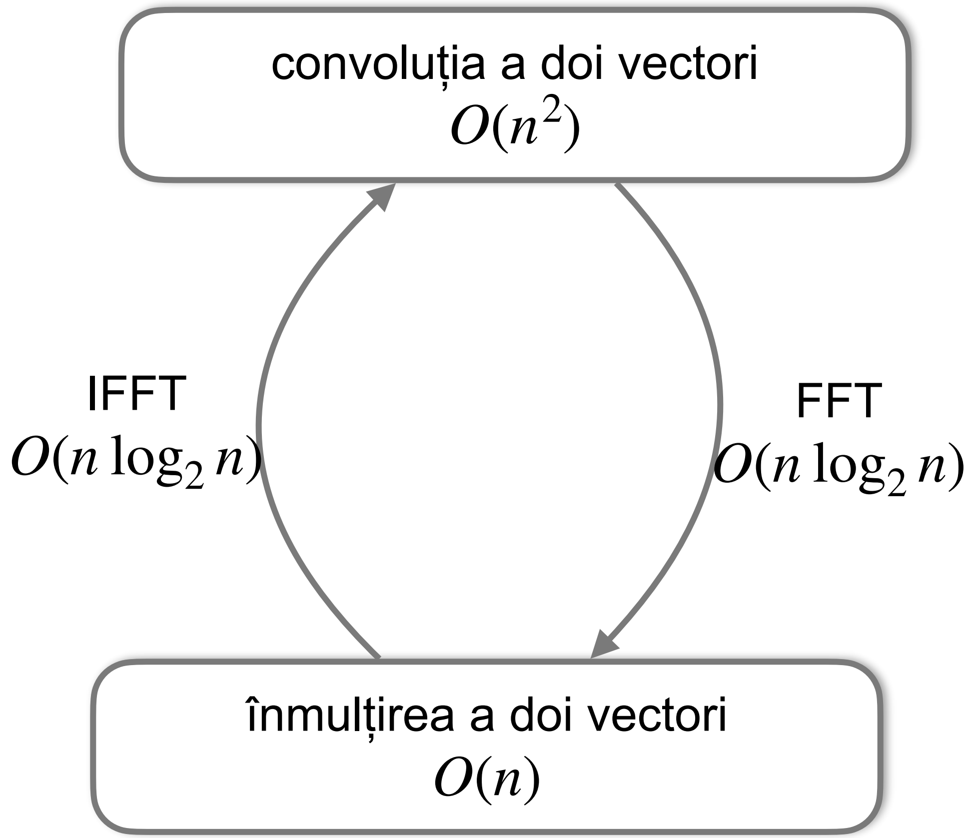
RECAPITULARE

ideea de transformare



RECAPITULARE

ideea de transformare: cazul Fourier



ideea: este mai ușor să rezolvi problema într-un alt domeniu
atenție: inclusiv operația de transformare trebuie să fie ușoară (aici domină)

RECAPITULARE

ideea de transformare: cazul Laplace (foarte folositor în inginerie)

rezolvarea de ecuații diferențiale

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \lim_{T\to\infty} \int_{\gamma - jT}^{\gamma + jT} F(s)e^{st}ds$$

Transformata Laplace Inversă

Transformata Laplace Directă

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

rezolvarea de ecuații, raționale

legătura în Fourier și Laplace?

https://en.wikipedia.org/wiki/Laplace_transform

RECAPITULARE

ideea de transformare: cazul Laplace (foarte folositor în inginerie)

rezolvarea de ecuații diferențiale

Transformata Laplace Inversă

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \lim_{T\to\infty} \int_{\gamma - jT}^{\gamma + jT} F(s) e^{st} ds$$

Transformata Laplace Directă

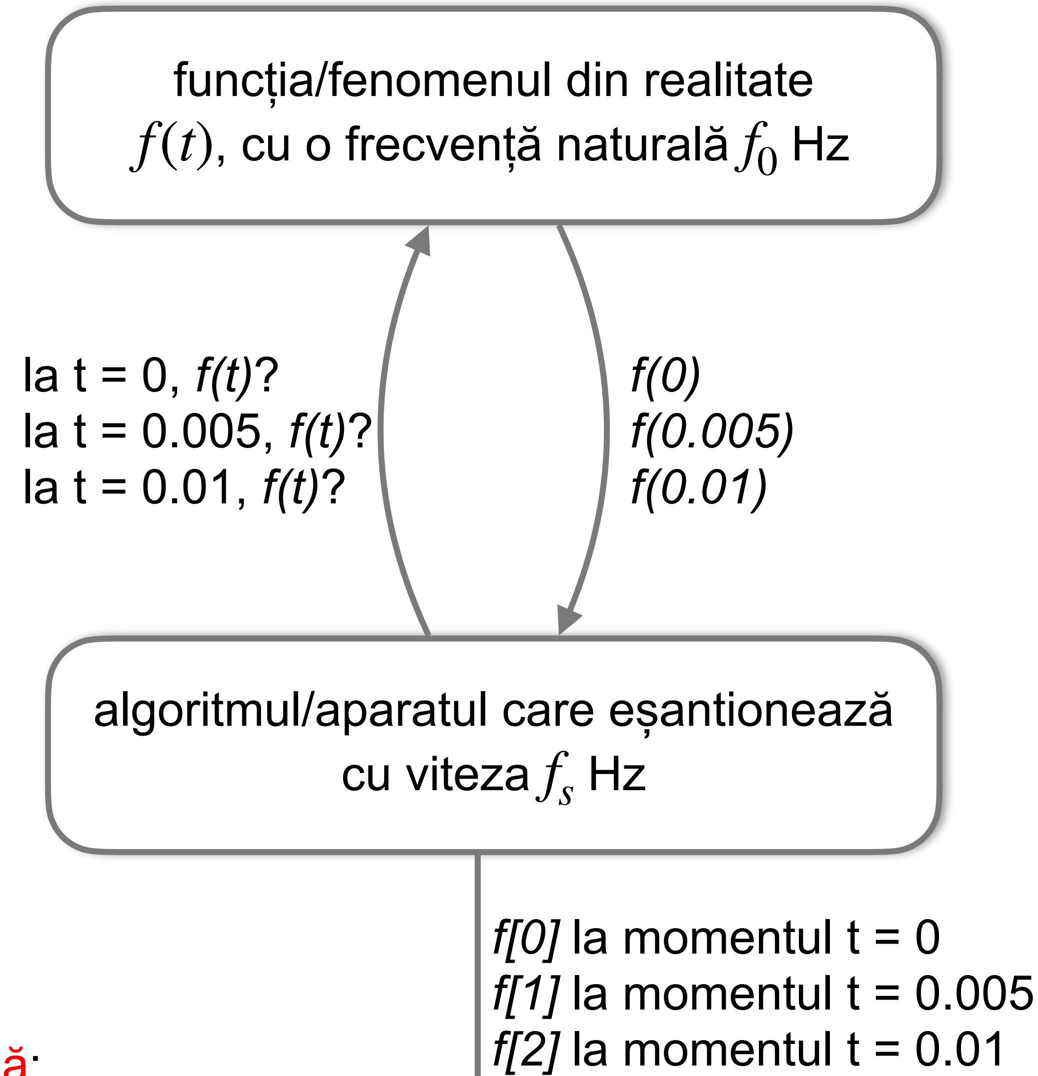
$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

rezolvarea de ecuații, raționale

Fourier este un caz special de Laplace când $s = j\omega$

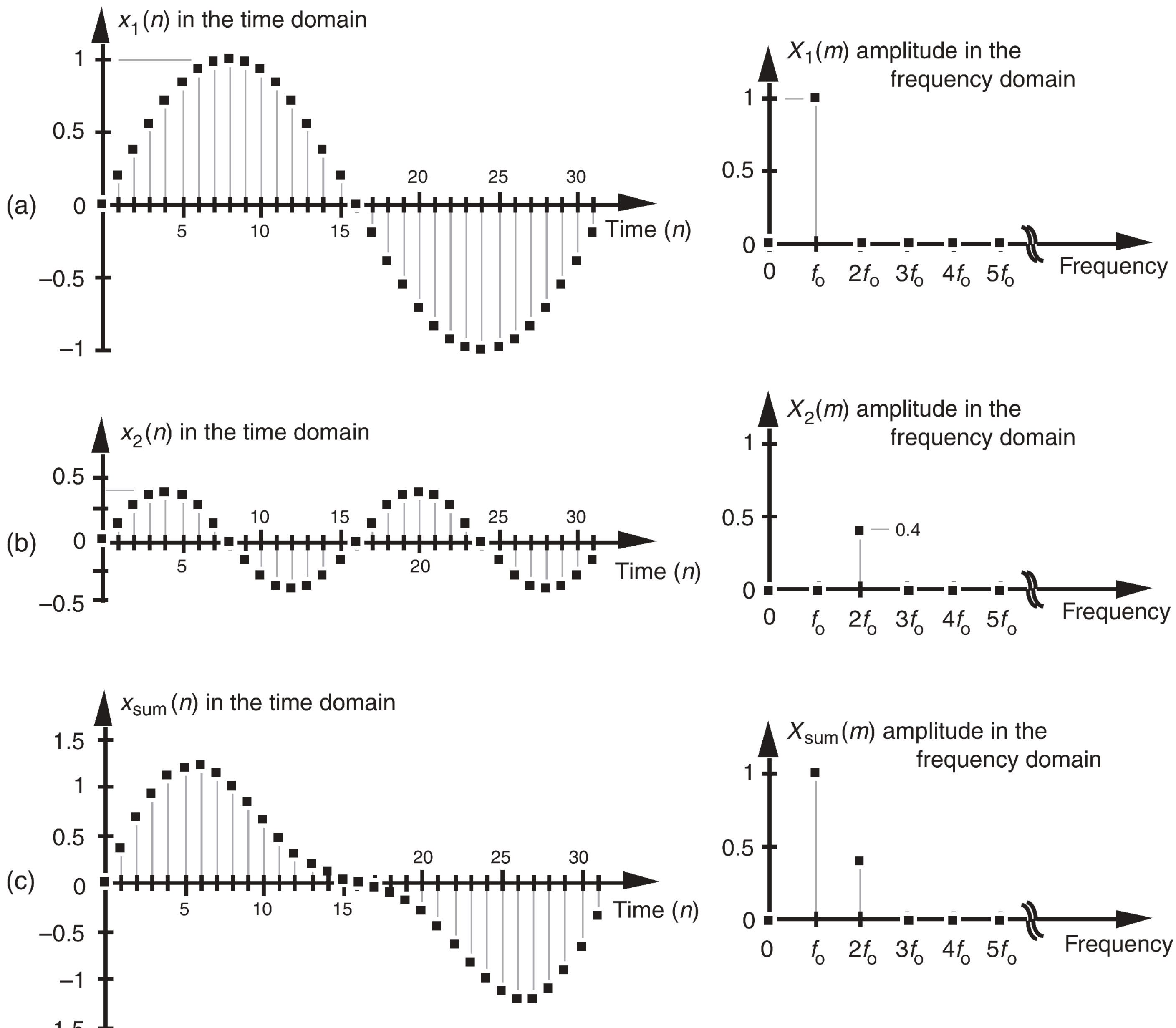
https://en.wikipedia.org/wiki/Laplace_transform

PROCESUL DE EȘANTIONARE



întrebare fundamentală:
ce relație trebuie să fie între f_0 și f_s că să nu pierdem nimic din $f(t)$?

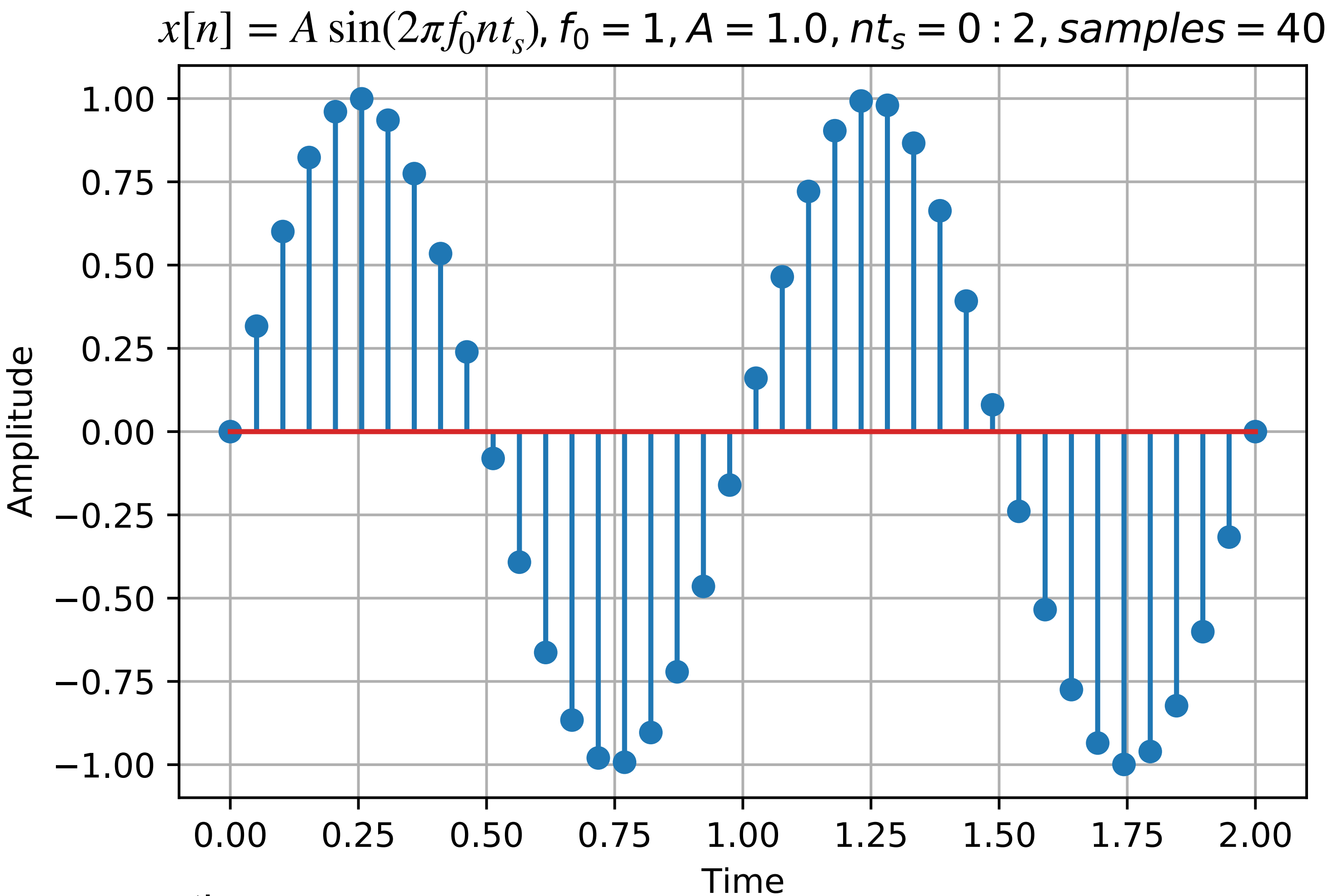
REPREZENTAREA ÎN FRECVENȚĂ



Source: (Lyons 2004)

REPREZENTAREA ÎN FRECVENȚĂ

- **cum determin frecvența semnalului în funcție de eșantioane?**



$$T = \frac{\text{eșantioane}}{\text{perioadă}} \times \underbrace{\frac{\text{timp}}{\text{eșantion}}}_{t_s} = \frac{40}{2} \times \frac{2}{40} = 20 \times 0.05 = 1s \implies f_0 = 1\text{Hz}$$

EXEMPLU: FRECVENȚA DE EȘANTIONARE $f_s = 7$

$x[0] = 0.00$

$x[1] = 0.78$

$x[2] = 0.97$

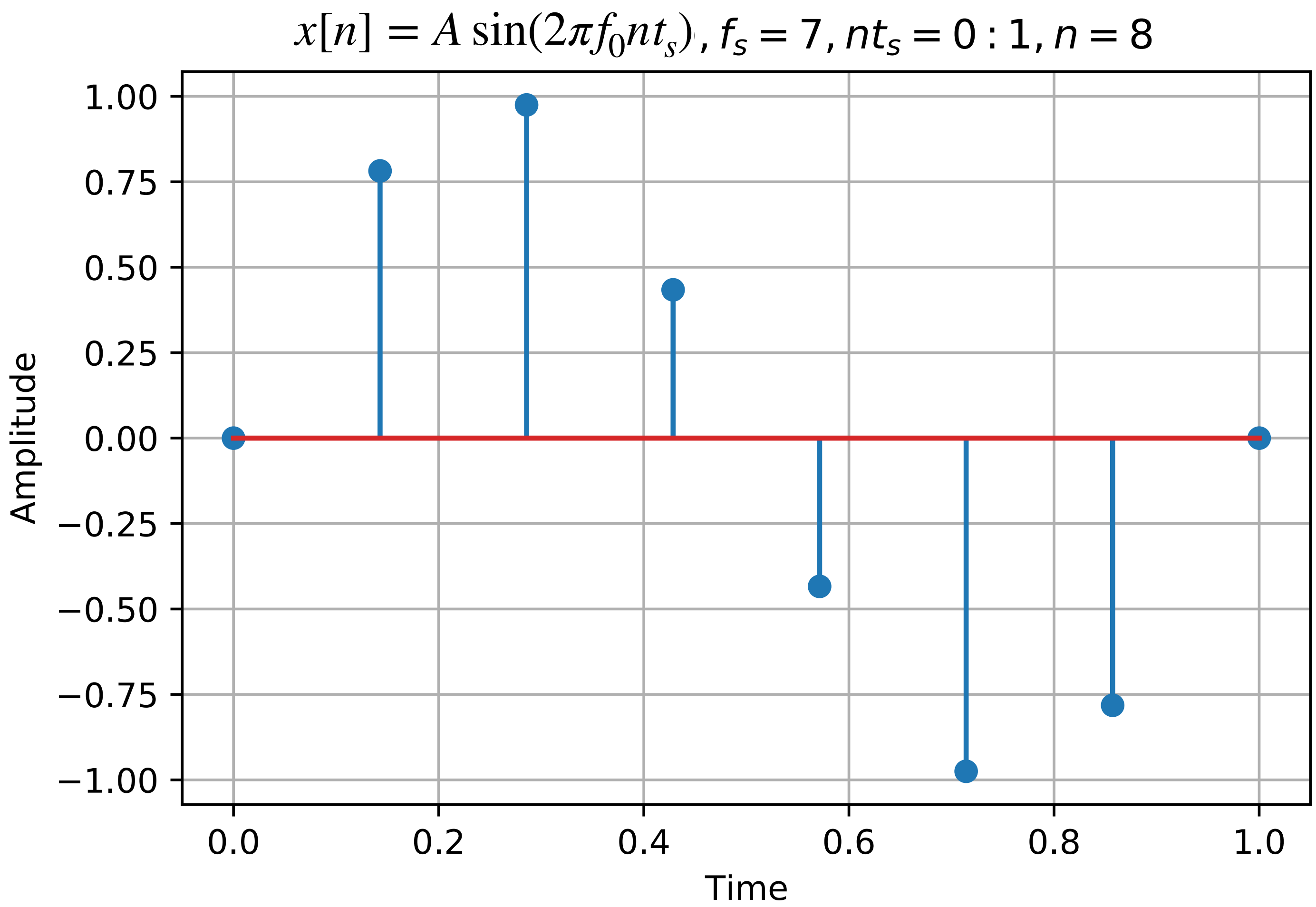
$x[3] = 0.43$

$x[4] = -0.43$

$x[5] = -0.97$

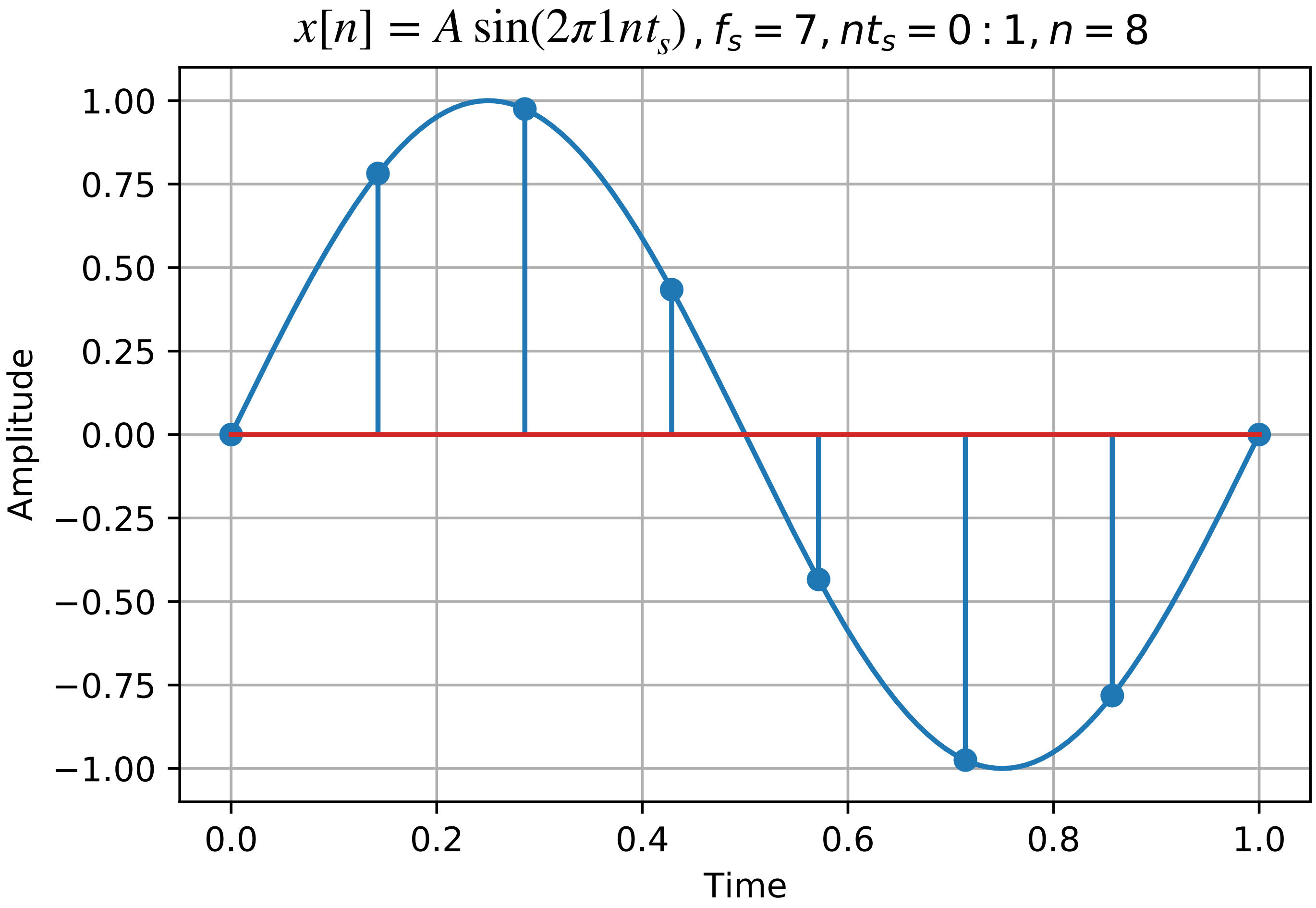
$x[6] = -0.78$

$x[7] = -0.00$



EXEMPLU: FRECVENȚA DE EȘANTIONARE $f_s = 7$

$$x[0] = 0.00$$
$$x[1] = 0.78$$
$$x[2] = 0.97$$
$$x[3] = 0.43$$
$$x[4] = -0.43$$
$$x[5] = -0.97$$
$$x[6] = -0.78$$
$$x[7] = -0.00$$



EXEMPLU: FRECVENȚA DE EȘANTIONARE $f_s = 7$

$x[0] = 0.00$

$x[1] = 0.78$

$x[2] = 0.97$

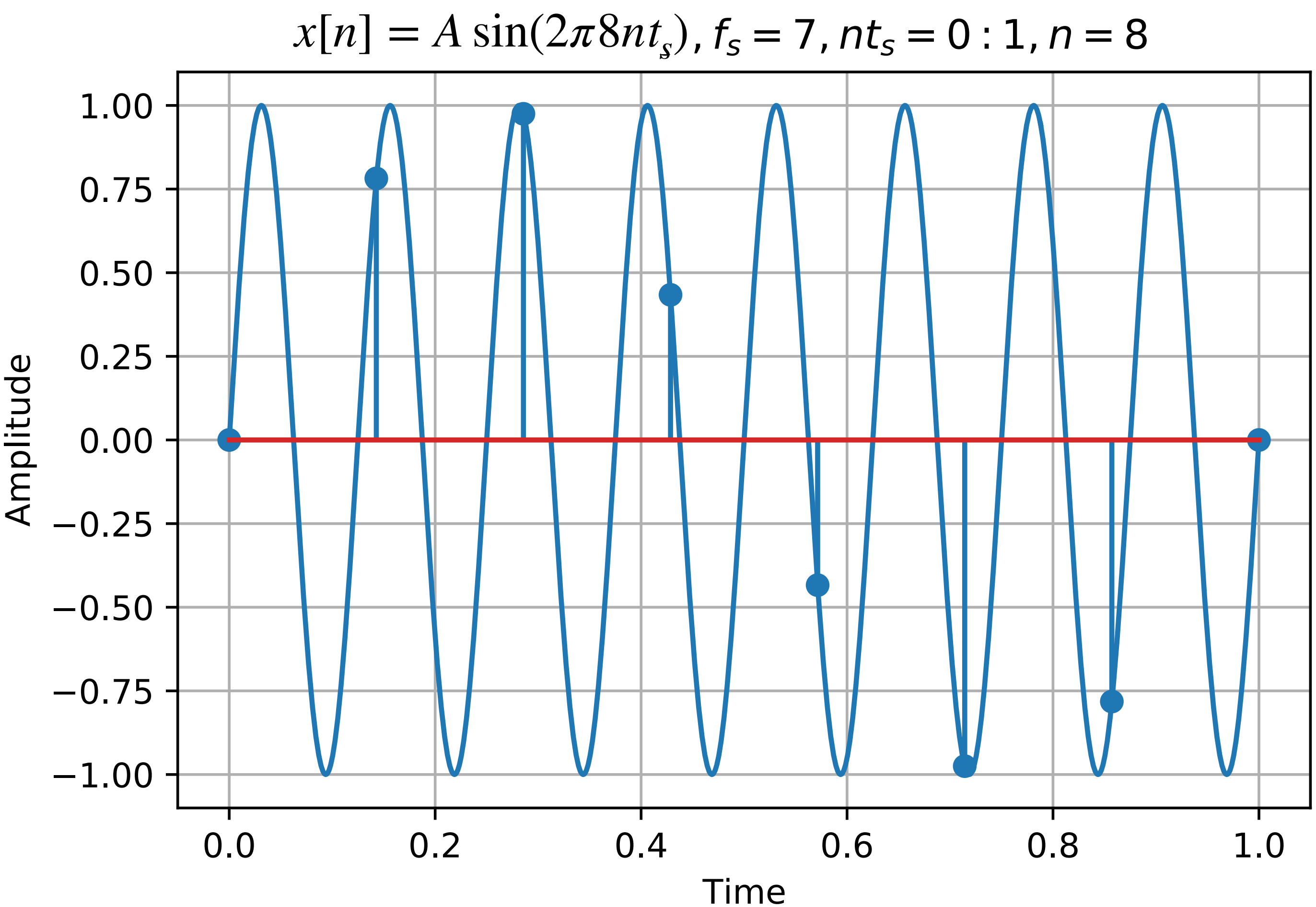
$x[3] = 0.43$

$x[4] = -0.43$

$x[5] = -0.97$

$x[6] = -0.78$

$x[7] = -0.00$



EXEMPLU: FRECVENȚA DE EȘANTIONARE $f_s = 7$

$x[0] = 0.00$

$x[1] = 0.78$

$x[2] = 0.97$

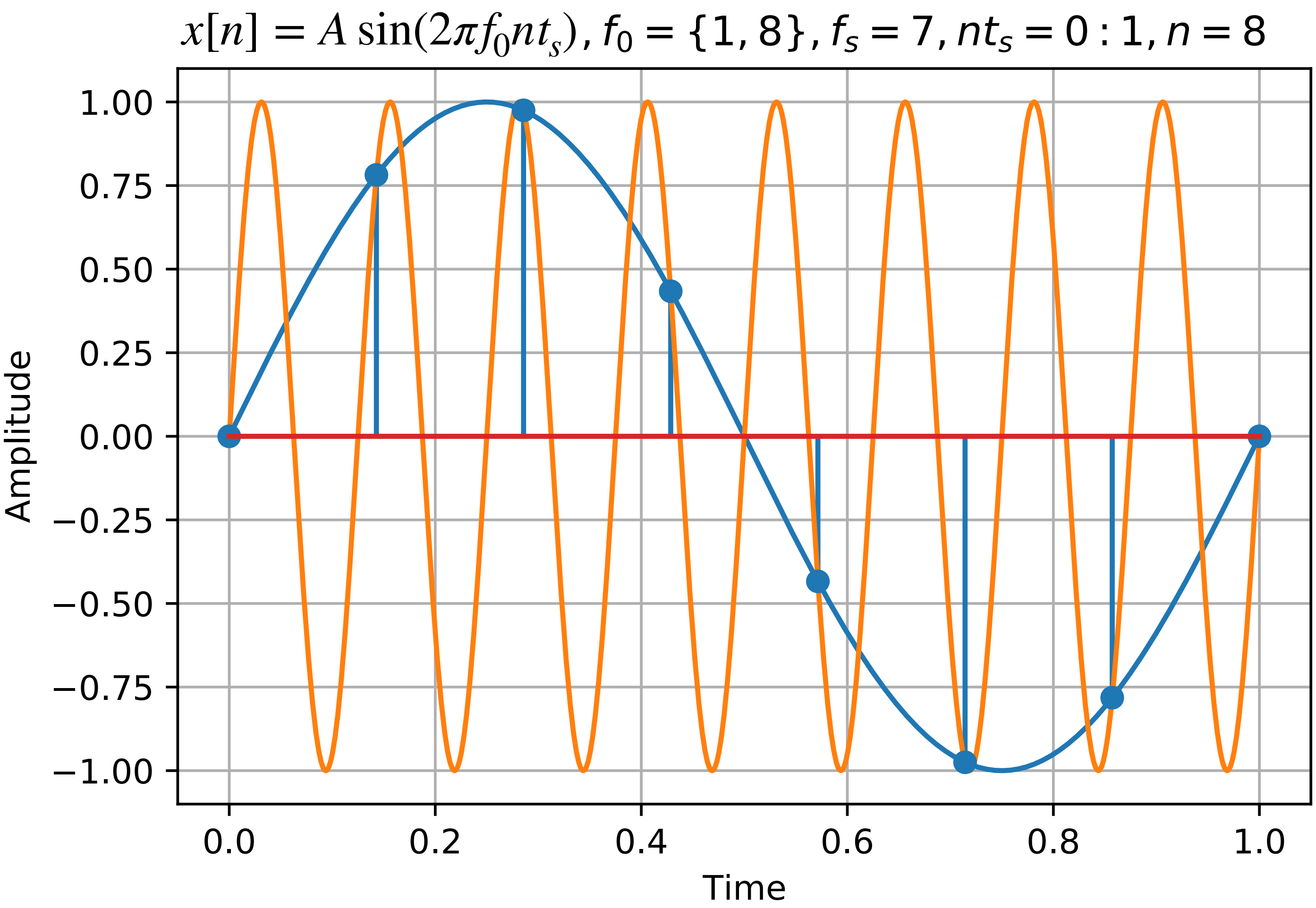
$x[3] = 0.43$

$x[4] = -0.43$

$x[5] = -0.97$

$x[6] = -0.78$

$x[7] = -0.00$



există o infinitate de sinusoide care trec prin cele 8 puncte!

ALIERE

- **fenomenul de aliere (aliasing) apare când:**

$$x[n] = \sin(2\pi f_0 n t_s) = \sin(2\pi (f_0 + k f_s) n t_s)$$

- **rezultatul fundamental: fie frecvența de eșantionare f_s (eșantioane / secundă) și k un număr întreg nenul. Atunci nu putem distinge eșantioanele unei sinusoide de frecvență f_0 Hz de eșantioanele unei siunsoide de $f_0 + k f_s$ Hz.**

ALIERE (DEMONSTRAȚIE)

- **fie semnalul continuu $x(t) = \sin(2\pi f_0 t)$ cu frecvența f_0 pe care îl eșantionăm cu o rată de f_s eșantioane pe secundă la perioade de timp constante $t_s = \dfrac{1}{f_s}$ $(0t_s, 1t_s, 2t_s, 3t_s, \ldots)$:**

$$
\begin{aligned}
x[0] &= \sin(2\pi 0 t_s)\\
x[1] &= \sin(2\pi 1 t_s)\\
x[2] &= \sin(2\pi 2 t_s)\\
x[3] &= \sin(2\pi 3 t_s)\\
&\vdots\\
x[n] &= \sin(2\pi n t_s)
\end{aligned}
$$

- **astfel încât eșantionul $x[n]$ are valoarea sinusoide originale la momentul nt_s**

ALIERE (DEMONSTRAȚIE)

- **știm că** $\sin(\alpha) = \sin(\alpha + 2\pi m)$**, cu** m **întreg, deci avem:**

$$x[n] = \sin(2\pi f_0 n t_s) = \sin(2\pi f_0 n t_s + 2\pi m)$$
$$= \sin\left(2\pi\left(f_0 + \frac{m}{n t_s}\right) n t_s\right)$$

- **fie** $m = kn$ **a.î. putem înlocui fracția cu** k**:**

$$x[n] = \sin\left(2\pi\left(f_0 + \frac{k}{t_s}\right) n t_s\right)$$

- **apoi folosind** $f_s = \dfrac{1}{t_s}$ **relația devine:**

$$x[n] = \sin(2\pi f_0 n t_s) = \sin\left(2\pi\left(f_0 + k f_s\right) n t_s\right)$$

EXEMPLU: FRECVENȚA DE EȘANTIONARE $f_s = 7$

- **aliasing:** $f_0 = 1, f_s = 7, k = 1 \implies f = f_0 + kf_s = 8$

$x[0] = 0.00$

$x[1] = 0.78$

$x[2] = 0.97$

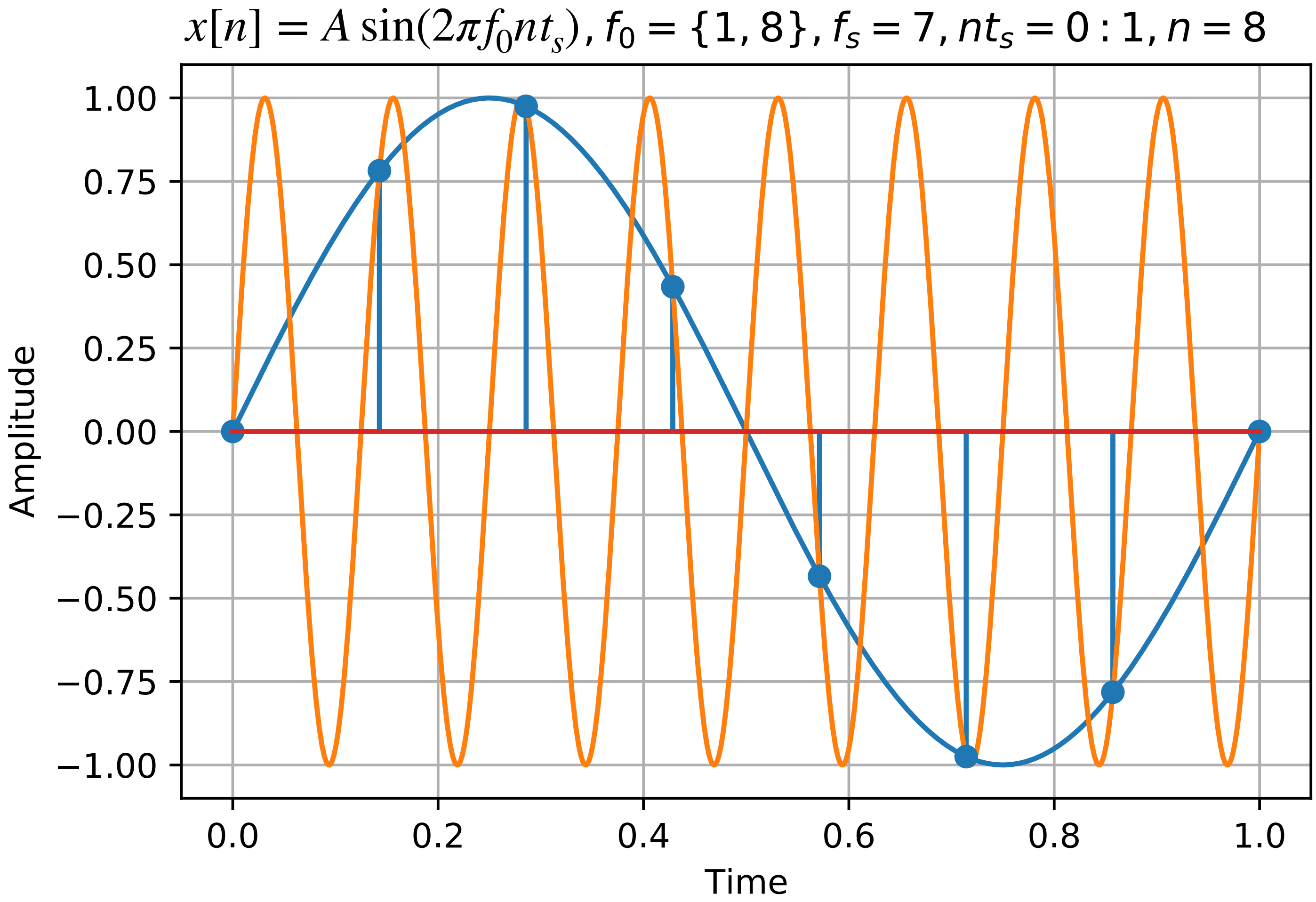
$x[3] = 0.43$

$x[4] = -0.43$

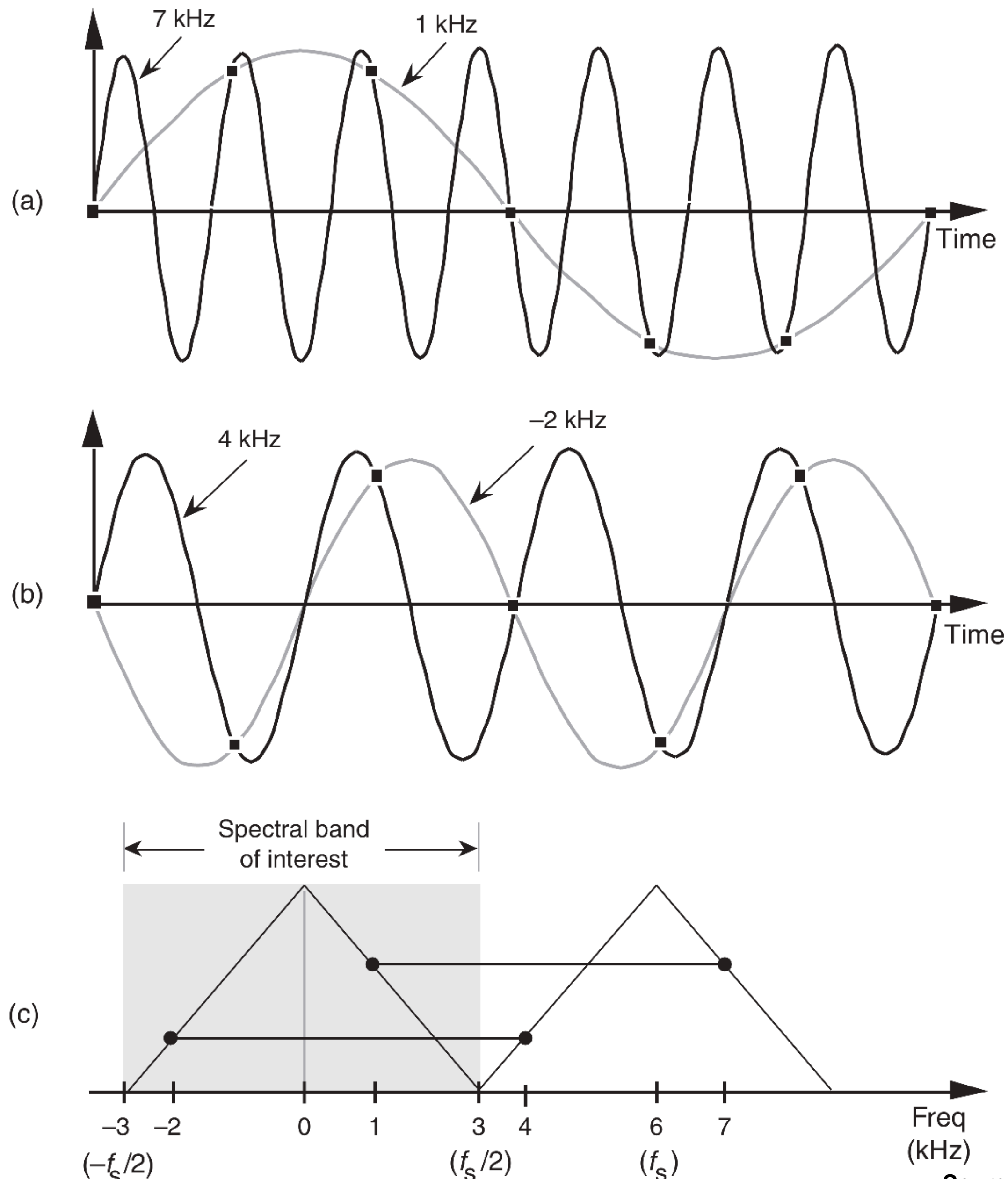
$x[5] = -0.97$

$x[6] = -0.78$

$x[7] = -0.00$

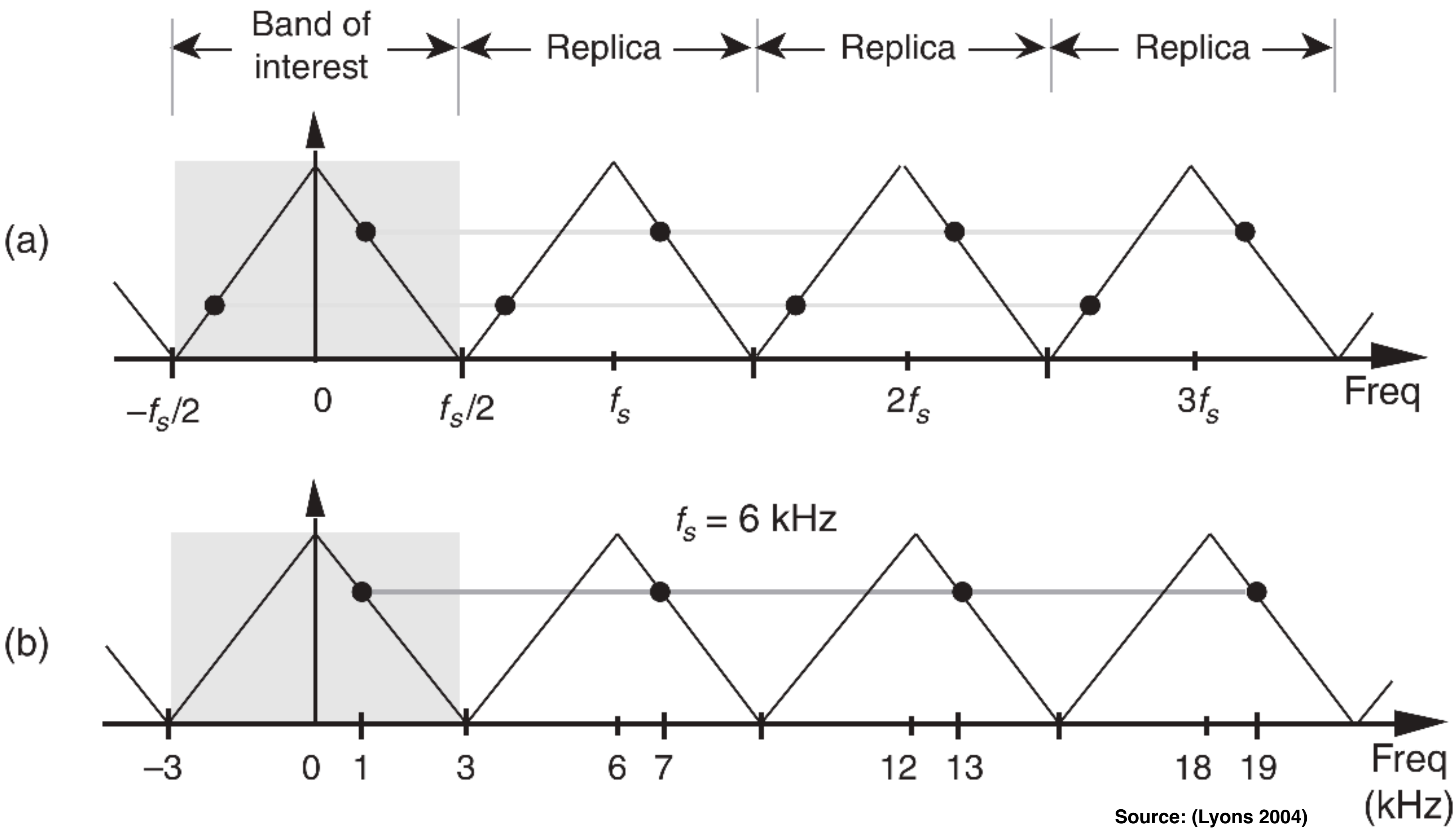


AMBIGUITATE ÎN FRECVENTĂ



Source: (Lyons 2004)

AMBIGUITATE ÎN FRECVENȚĂ

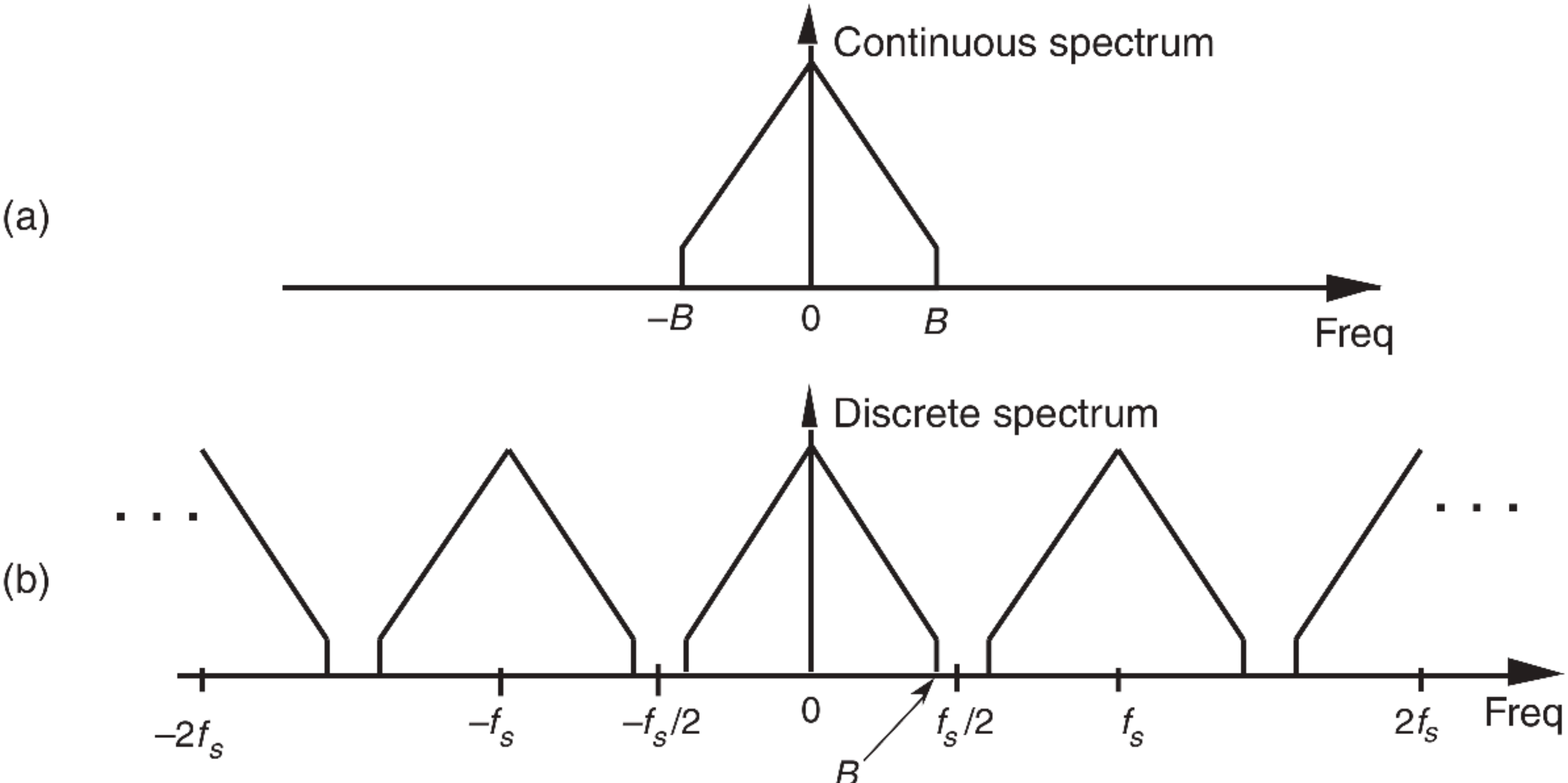


Source: (Lyons 2004)

semnalul $f_0 = 7$ kHz eșantionat cu $f_s = 6$ kHz produce o secvență a cărui spectru reprezintă simultan semnalele (tonurile): 1 kHz, 7 kHz, 13 kHz, 19 kHz …

AMBIGUITATE ÎN FRECVENȚĂ

- **semnalele limitate în bandă sunt semnalele a căror amplitudine spectrală este nulă în afara intervalului $[-B$ Hz, $+B$ Hz$]$**



Source: (Lyons 2004)

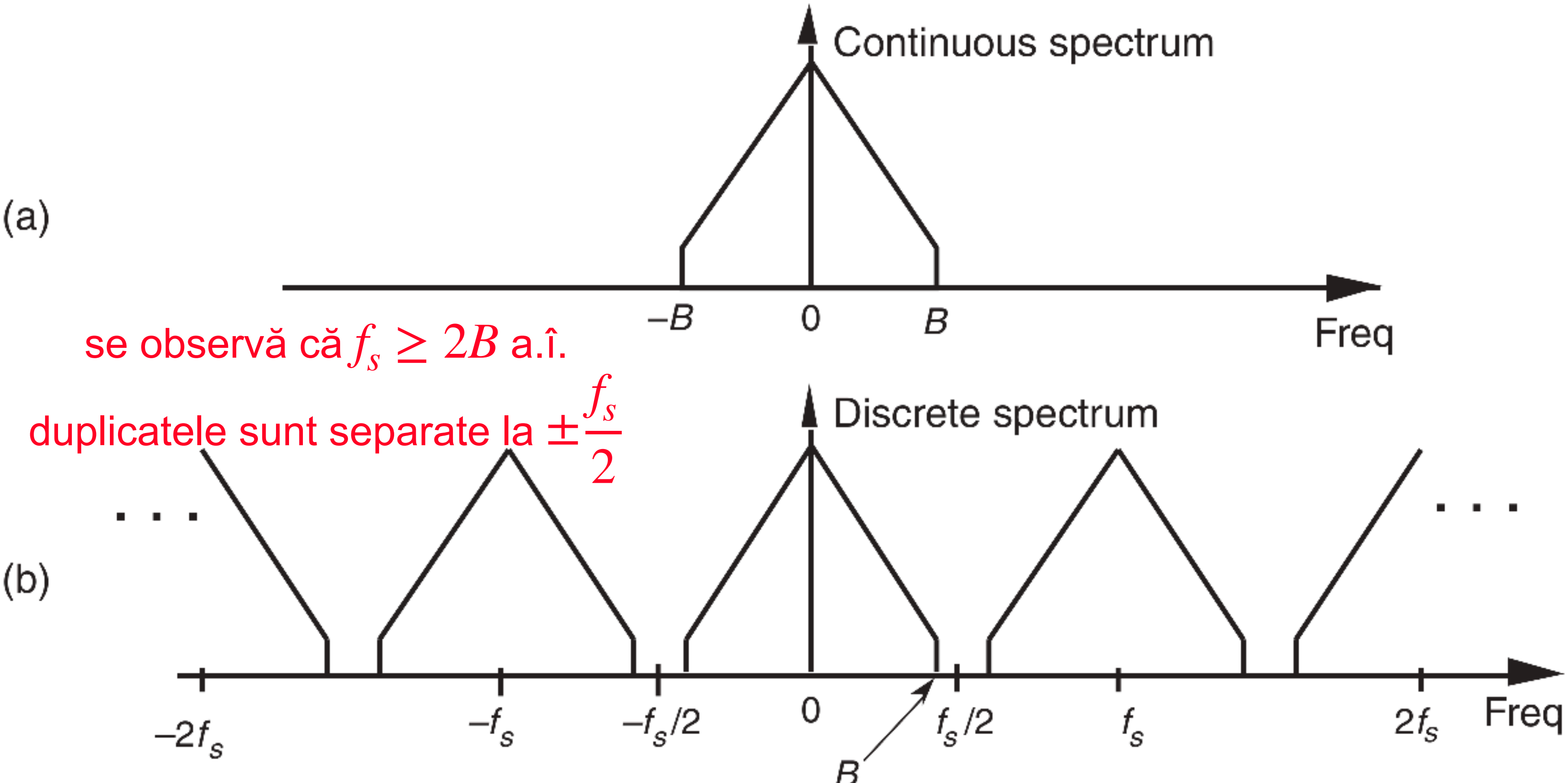
- **semnalul continuu este discretizat apărând duplicatele în frecvență**

AMBIGUITATE ÎN FRECVENȚĂ

- **semnalele limitate în bandă sunt semnalele a căror amplitudine spectrală este nulă în afara intervalului $[-B$ Hz, $+B$ Hz$]$**

se observă că $f_s \geq 2B$ a.î.

duplicatele sunt separate la $\pm\frac{f_s}{2}$



Source: (Lyons 2004)

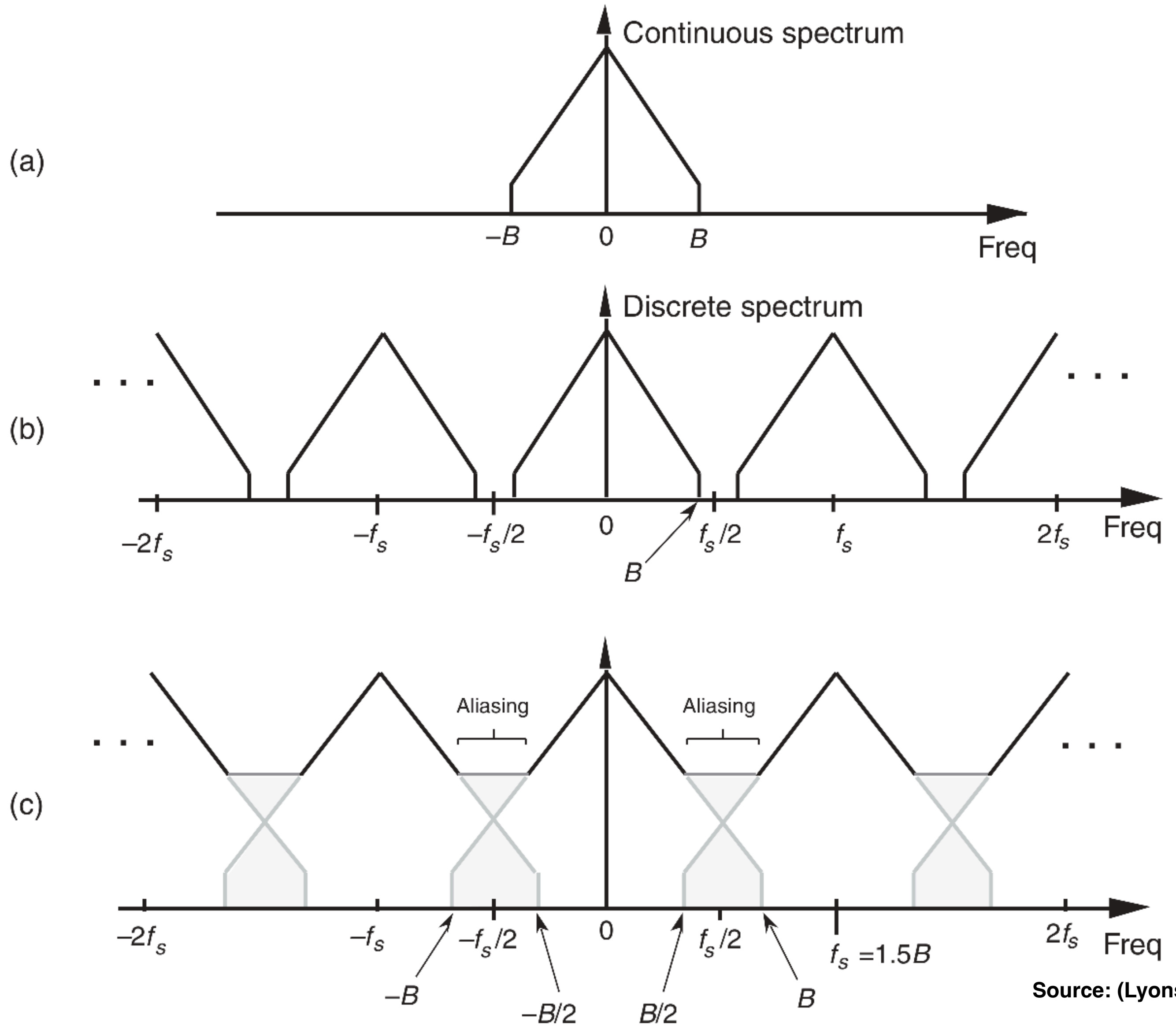
- **semnalul continuu este discretizat apărând duplicatele în frecvență**

AMBIGUITATE ÎN FRECVENȚĂ

- **frecvența de eșantionare $f_s \geq 2B$ este criteriul Nyquist de eșantionare, rezultat din teorema Nyquist-Shannon, ce asigură separarea duplicatelor în domeniul frecvenței**

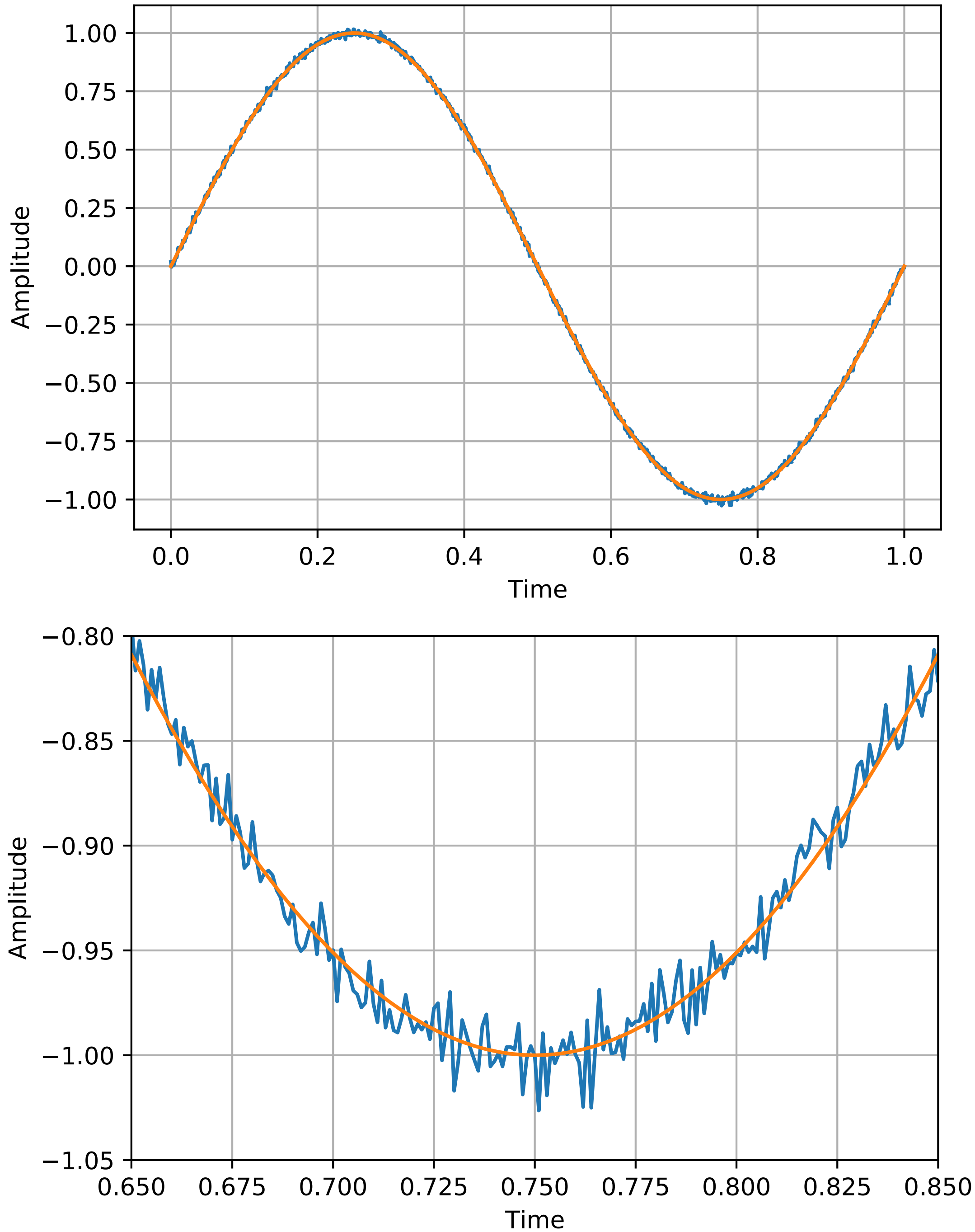
AMBIGUITATE ÎN FRECVENȚĂ

- **eșantionare sub frecvența Nyquist**



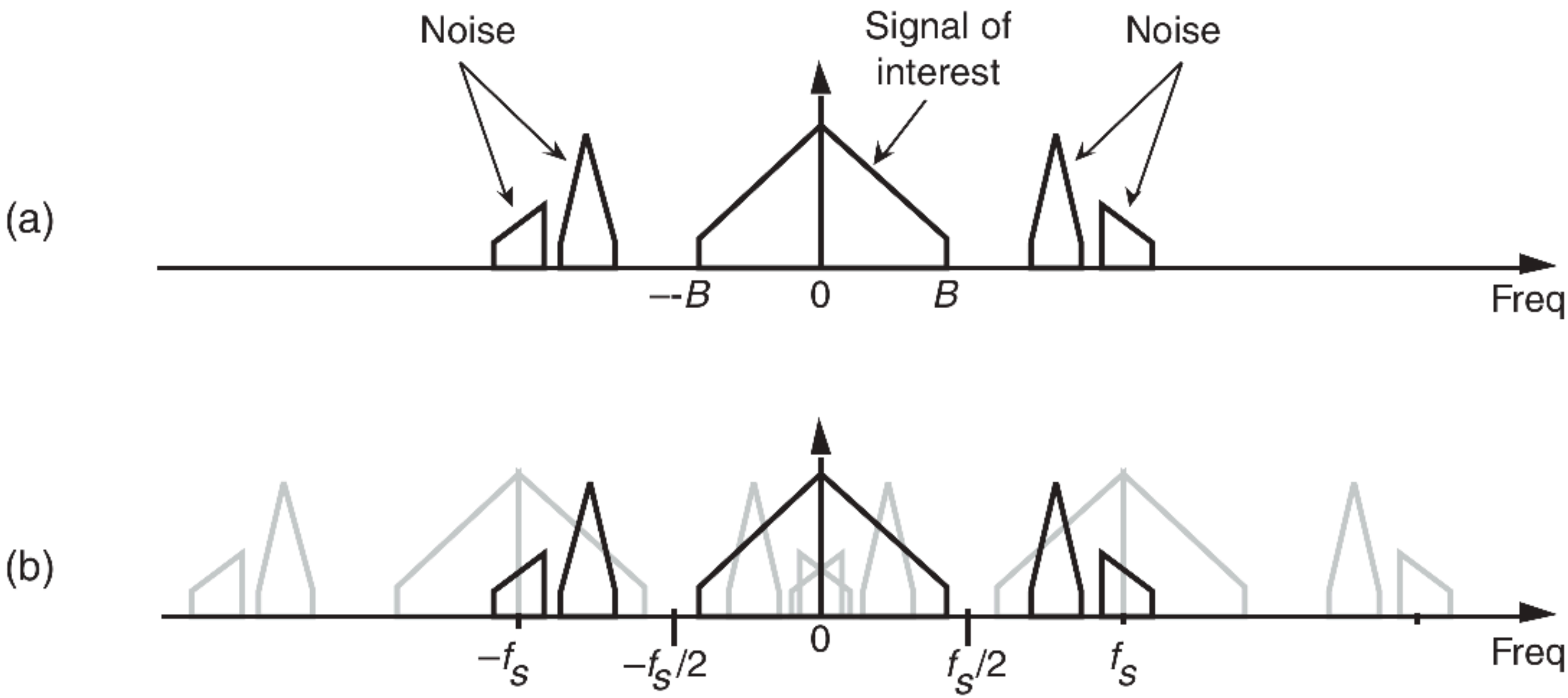
Source: (Lyons 2004)

ZGOMOT


1.00
0.75
0.50
0.25
0.00
−0.25
−0.50
−0.75
−1.00
Amplitude
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
Time
−0.80
−0.85
−0.90
−0.95
−1.00
−1.05
Amplitude
0.650
0.675
0.700
0.725
0.750
0.775
0.800
0.825
0.850
Time

ZGOMOT

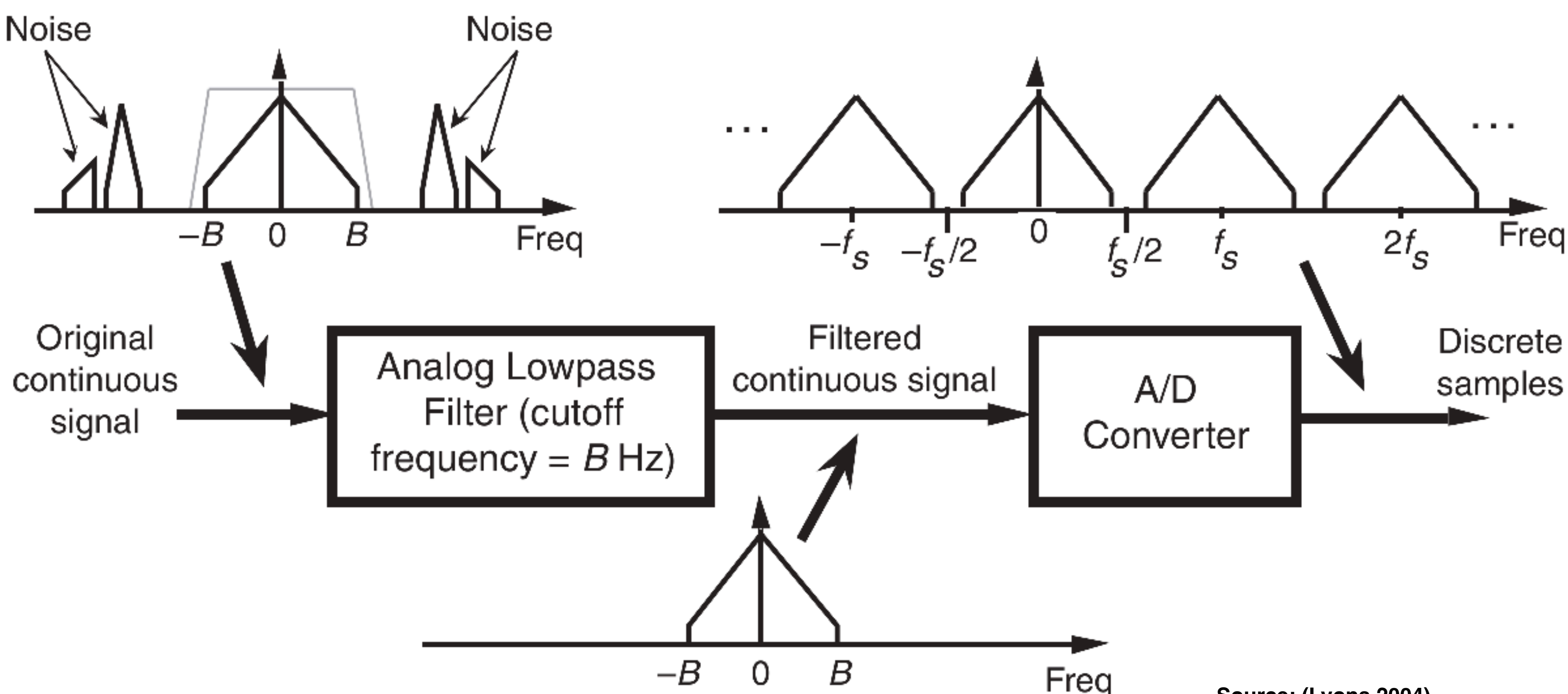
- **spectru cu zgomot**



Source: (Lyons 2004)

ZGOMOT

- **eliminarea zgomotului**



Source: (Lyons 2004)

REFERINȚE BIBLIOGRAFICE GENERALE

- A. V. Oppenheim și R. W. Schafer, **Discrete-time signal processing**, Pearson, 2014

- R. G. Lyons, **Understanding digital signal processing**, Prentice Hall, 2004

- S. Mallat, **A wavelet tour of signal processing: the sparse way**, Academic Press, 2008